**Лекция №13**

**Технология моделирования случайных факторов**

**Генерация псевдослучайных чисел (ПСЧ)**

*Имитационное моделирование*ИС, как правило, предполагает *необходимость учета различных случайных факторов*— событий, величин, векторов (систем случайных величин), процессов.  
В основе *всех методов и приемов*моделирования названных случайных факторов лежит *использование случайных чисел, равномерно распределенных на интервале*[0;1].  
До появления ЭВМ в качестве генераторов случайных чисел применяли *механические устройства*— колесо рулетки, специальные игральные кости и устройства, которые перемешивали фишки с номерами, вытаскиваемые вручную по одной.  
По мере роста объемов применения случайных чисел для ускорения их моделирования стали обращаться к помощи *электронных устройств.*Самым известным из таких устройств был *электронный импульсный генератор, управляемый источником шума,*разработанный широко известной фирмой RAND Corporation. Фирмой в 1955 г. была выпущена книга, содержащая *миллион случайных чисел,*сформированных этим генератором, а также *случайные числа в записи на магнитной ленте.*Использовались и другие подобные генераторы — например, основанные на преобразовании естественного случайного шума при *радиоактивном распаде.*Все эти генераторы обладают *двумя недостатками*:  
§*невозможно повторно получить одну и ту же последовательность*случайных чисел, что бывает необходимо при экспериментах с имитационной моделью;

* *технически сложно реализовать физические генераторы,*способные длительное время выдавать случайные числа "требуемого качества".

В принципе, можно заранее ввести полученные таким образом случайные числа в память машины и обращаться к ним по мере необходимости, что сопряжено с понятными негативными обстоятельствами — *большим*(причем неоправданным) расходов *ресурсов ЭВМ и затратой времени на обмен данными*между долгосрочной и оперативной памятью.  
В силу этого наибольшее распространение получили другие генераторы, позволяющие получать так называемые *псевдослучайные числа*(ПСЧ) с помощью *детерминированных рекуррентных формул.*Псевдослучайными эти числа называют потому, что фактически они, даже пройдя все тесты на случайность и равномерность распределения, остаются полностью детерминированными. Это значит, что если каждый цикл работы генератора начинается с одними и теми же исходными данными, то на выходе получаем одинаковые последовательности чисел. Это свойство генератора обычно называют *воспроизводимостью последовательности*ПСЧ.  
Программные генераторы ПСЧ должны удовлетворять *следующим требованиям*:

* ПСЧ должны быть *равномерно распределены*на интервале [0; 1] и *независимы, т.*е. случайные последовательности должны быть *некоррелированы*;
* *цикл генератора*должен иметь *возможно большую длину*;
* последовательность ПСЧ должна быть *воспроизводима*;
* генератор должен быть *быстродействующим*;
* генератор должен занимать *малый объем памяти.*

Первой расчетной процедурой генерации ПСЧ, получившей достаточно широкое распространение, можно считать *метод срединных квадратов,*предложенный фон Нейманом и Метрополисом в 1946 г. Сущность метода заключается в последовательном нахождении квадрата некоторого -значного числа; выделении из него средних цифр, образующих новое число, которое и принимается за очередное в последовательности ПСЧ; возведении этого числа в квадрат; выделении из квадрата *т*средних цифр и т.д. до получения последовательности требуемой длины.  
Как следует из описания процедуры метода, он весьма *прост в вычислительном отношении*и, следовательно, *легко реализуем программно.*Однако ему присущ очень *серьезный недостаток*— *обусловленность статистических свойств генерируемой последовательности выбором ее корня (начального значения),*причем эта обусловленность не является "регулярной", т.е. трудно определить заранее, можно ли использовать полученные данным методом ПСЧ при проведении исследований. Иными словами, *метод срединных квадратов не позволяет по начальному значению оценить качество последовательности ПСЧ, в частности ее период.*

**Мультипликативный метод**

Основная формула мультипликативного генератора для расчета значения очередного ПСЧ по значению предыдущего имеет вид:

Лекция №13

где *а*, *т*— неотрицательные целые числа (их называют *множитель*и *модуль).*  
Как следует из формулы, для генерации последовательности ПСЧ необходимо задать начальное значение (корень) последовательности, множитель и модуль, причем *период (длина) последовательности Р зависит от разрядности ЭВМ и выбранного модуля,*а *статистические свойства — от выбранного начального значения и множителя.*Таким образом, следует выбирать перечисленные величины так, чтобы по возможности максимизировать длину последовательности и минимизировать корреляцию между генерируемыми ПСЧ. В специальной литературе приводятся *рекомендации*по выбору значений параметров метода, использование которых обеспечивает (гарантирует) получение определенного количества ПСЧ с требуемыми статистическими свойствами. Так, если для машины с двоичной системой счисления задать , , где — число двоичных цифр (бит) в машинном слове; *Т*— любое целое положительное число; *V*— любое положительное нечетное число, получим последовательность ПСЧ с периодом, равным . Заметим, что в принципе возможно за счет другого выбора модуля *т*увеличить длину последовательности до , частично пожертвовав скоростью вычислений. Кроме того, важно, что получаемые таким образом ПСЧ оказываются нормированными, т.е. распределенными от 0 до 1. От выбора корня последовательности ее длина не зависит (при равенстве остальных параметров).

**Аддитивный метод**

Основная формула для генерации ПСЧ по аддитивному методу имеет вид:

http://mirea.kremlina.ru/uploads/posts/2017-12/1512416144_2.png

где *т*— целое число.  
Очевидно, что для инициализации генератора, построенного по этому методу, необходимо помимо модуля *т*задать два исходных члена последовательности. При ; последовательность превращается в ряд Фибоначчи. Рекомендации по выбору модуля совпадают с предыдущим случаем; длину последовательности можно оценить по приближенной формуле

http://mirea.kremlina.ru/uploads/posts/2017-12/1512416123_3.png

**Смешанный метод**

Данный метод несколько расширяет возможности мультипликативного генератора за счет введения так называемого коэффициента сдвига *с*. Формула метода имеет вид:

http://mirea.kremlina.ru/uploads/posts/2017-12/1512416092_4.png

За счет выбора параметров генератора можно обеспечить максимальный период последовательности ПСЧ *P=2b*.  
Разработано *множество модификаций*перечисленных конгруэнтных методов, обладающих определенными преимуществами при решении конкретных практических задач, а также *рекомендаций*по выбору того или иного метода. Для весьма широкого круга задач *вполне удовлетворительными оказываются типовые генераторы*ПСЧ, разработанные, как правило, на основе смешанного метода и входящие в состав стандартного общего программного обеспечения большинства ЭВМ. Специальным образом генерацию ПСЧ организуют либо для особо *масштабных имитационных исследований,*либо *при повышенных требованиях к точности имитации*реального процесса (объекта).  
Подводя итог, подчеркнем, что *разработка конгруэнтных методов зачастую осуществляется на основе эвристического подхода,*основанного на опыте и интуиции исследователя. После модификации известного метода тщательно проверяют, обладают ли генерируемые в соответствии с новой формулой последовательности ПСЧ требуемым статистическими свойствами, и в случае положительного ответа формируют рекомендации по условиям ее применения.

## Лекция №13

### Моделирование случайных событий

В теории вероятностей *реализацию некоторого комплекса условий называют испытанием. Результат испытания,*регистрируемый как факт, называют событием.  
*Случайным*называют событие, которое в результате испытания *может наступить, а может и не наступить*(в отличие от достоверного события, которое при реализации данного комплекса наступает всегда, и *невозможного*события, которое при реализации данного комплекса условий не наступает никогда). *Исчерпывающей характеристикой случайного события является вероятность его наступления.*Примерами случайных событий являются отказы в экономических системах; объемы выпускаемой продукции предприятием каждый день; котировки валют в обменных пунктах; состояние рынка ценных бумаг и биржевого дела и т.п.  
Моделирование случайного события заключается в " определении ("розыгрыше") факта его наступления.  
Для моделирования случайного события *А*, наступающего в опыте с вероятностью , достаточно *одного случайного (псевдослучайного) числа R*, *равномерно распределенного на интервале*[0;1]. В случае попадания ПСЧ *R* в интервал событие *А* считают наступившим в данном опыте; в противном случае — не наступившим в данном опыте. На рис. 1 показаны оба исхода: при ПСЧ событие следует считать наступившим; при ПСЧ — событие в данном испытании не наступило. Очевидно, что чем больше вероятность наступления моделируемого события, тем чаще ПСЧ, равномерно распределенные на интервале [0;1], будут попадать в интервал , что и означает факт наступления события в испытании.

[http://mirea.kremlina.ru/uploads/posts/2017-12/thumbs/1512416336_1.png](http://mirea.kremlina.ru/uploads/posts/2017-12/1512416336_1.png)

Рис. 1. Моделирование случайных событий.

Для моделирования одного из *полной группы N случайных несовместных событий A1, A2,...,AN,*с вероятностями наступления {PA1, PA2,...,PAN} соответственно, также достаточно *одного ПСЧ R*.  
Напомним, что для таких случайных событий можно записать:

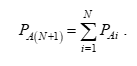
http://mirea.kremlina.ru/uploads/posts/2017-12/1512416391_2.png

Факт наступления одного из событий группы определяют исходя из условия принадлежности ПСЧ *R* тому или иному интервалу, на который разбивают интервал [0;1]. Так, на рис. 2 для ПСЧ считают, что наступило событие *А*2. Если ПСЧ оказалось равным , считают, что наступило событие A(N-1).

[http://mirea.kremlina.ru/uploads/posts/2017-12/thumbs/1512416362_3.png](http://mirea.kremlina.ru/uploads/posts/2017-12/1512416362_3.png)

Рис. 2.Моделирование полной группы несовместных событий.

Если группа событий не является полной, вводят *дополнительное (фиктивное)*событие , вероятность которого определяют по формуле:



Далее действуют по уже изложенному алгоритму для полной группы событий с одним изменением: если ПСЧ попадает в последний, -й интервал, считают, что *пи одно из N событий,*составляющих неполную группу, *не наступило.*  
В практике имитационных исследований часто возникает необходимость моделирования *зависимых событий,*для которых вероятность наступления одного события оказывается зависящей от того, наступило или не наступило другое событие. В качестве одного из примеров зависимых событий приведем доставку груза потребителю в двух случаях: когда маршрут движения известен и был поставщиком дополнительно уточнен, и когда уточнения движения груза не проводилось. Понятно, что вероятность доставки груза от поставщика к потребителю для приведенных случаев будет различной.  
Для того чтобы провести моделирование двух зависимых случайных событий *А*и *В*,необходимо задать следующие полные и условные вероятности:

[http://mirea.kremlina.ru/uploads/posts/2017-12/thumbs/1512416335_5.png](http://mirea.kremlina.ru/uploads/posts/2017-12/1512416335_5.png)

Заметим, что, если вероятность наступления события *В*при условии, что событие *А* не наступило, не задана, ее можно определить по формуле:

[http://mirea.kremlina.ru/uploads/posts/2017-12/thumbs/1512416319_6.png](http://mirea.kremlina.ru/uploads/posts/2017-12/1512416319_6.png)

Существуют *два алгоритма*моделирования зависимых событий. Один из них условно можно назвать "последовательным моделированием"; другой — "моделированием *после предварительных расчетов".*

#### Последовательное моделирование

Алгоритм последовательного моделирования представлен на рис. 3.  
Несомненными достоинствами данного алгоритма являются его *простота*и *естественность,*поскольку зависимые события "разыгрываются" последовательно — так, как они наступают (или не наступают) в реальной жизни, что и является *характерной особенностью большинства имитационных моделей.*Вместе с тем алгоритм предусматривает троекратное обращение к датчику случайных чисел (ДСЧ), что увеличивает время моделирования.

#### Моделирование после предварительных расчетов

Приведенные на рис. 3 четыре исхода моделирования зависимых событий образуют *полную группу несовместных событий.*На этом основан алгоритм моделирования, предусматривающий *предварительный расчет*вероятностей каждого из исходов и "розыгрыш" факта наступления одного из них, как для любой группы несовместных событий. Рис. 4 иллюстрирует разбиение интервала [0;1] на четыре отрезка, длины которых соответствуют вероятностям исходов наступления событий.

[http://mirea.kremlina.ru/uploads/posts/2017-12/thumbs/1512416346_7.png](http://mirea.kremlina.ru/uploads/posts/2017-12/1512416346_7.png)

Рис. 4.Разбиение интервала [0;1] для реализации алгоритма  
моделирования зависимых событий "после предварительных расчетов".